

Дискретное преобразование Фурье по коротким выборкам при наличии шумов

Е. И. ГОЛЬДШТЕЙН, Д. В. ЛИ

Рассмотрены зависимости погрешности дискретного преобразования Фурье от длины реализации рассматриваемого сигнала. Введение процедуры предварительного определения периода позволяет рассматривать сигналы на коротких выборках, что значительно снижает вычислительные и аппаратные затраты.

Ключевые слова: дискретное преобразование Фурье, длина реализации, период сигнала, короткая выборка.

Dependences of DFT error on length of a considered signal realization were examined. Introduction of the procedure of period preliminary definition allows to consider signals on shot signal realization, that considerably reduces computing and hardware expenses.

Key words: discrete Fourier transform, transducer, length of realization, period of signal, shot signal realization.

Повсеместный переход к цифровым методам измерения повышает интерес к алгоритмам обработки сигналов на коротких выборках, что соответствует тенденции выбора при одинаковой точности таких методик и алгоритмов, которые требуют меньших вычислительных затрат [1, 2]. Это целиком и полностью относится к преобразованиям Фурье — дискретному (ДПФ) и быстрому (БПФ), являющимся самыми распространенными алгоритмами гармонического анализа из-за своей простоты и помехоустойчивости [3, 4].

Коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} U_i \cos(2\pi k i \Delta t f);$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} U_i \sin(2\pi k i \Delta t f),$$

где N — число отсчетов дискретизированного сигнала U_i , приходящихся на интервал реализации T_p рассматриваемого сигнала. В идеальном случае T_p равен периоду T_c . Часто шаг дискретизации Δt рассматриваемого сигнала не кратен периоду T_c , что сказывается на точности вычисления коэффициентов a_k и b_k , и, как следствие, на точности искомым параметров:

$$C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \varphi_k = \arctg(b_k / a_k).$$

Точность ДПФ также уменьшается при наличии помех и сильно зависит от того, насколько точно известен период сигнала.

Результаты вычислений погрешностей ДПФ с предварительным определением T_c при различном уровне помех

R, %	δT_c	δU_0	δU_{m1}	δU_{m2}	δU_{m3}	$\delta \varphi_1$	$\delta \varphi_2$	$\delta \varphi_3$	σ
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0,078	0,207	0,26	0,865	5,158	0,907	0,7	1,497	0,827
10	0,292	0,424	0,529	2,194	13,948	2,457	1,63	3,038	1,989
15	0,464	0,649	0,75	3,239	20,832	3,674	2,438	4,885	2,96
20	0,591	0,828	1,088	4,123	25,622	4,808	3,099	7,187	3,832

ла. Поэтому на практике ДПФ используют при увеличенном интервале реализации неизвестного сигнала $T_p \geq 10T_c$. Однако это требует гораздо большего времени на вычисления и соответствующих аппаратных затрат, чего можно избежать, введя в ДПФ процедуру предварительного определения периода сигнала. При этом представляется возможным проводить вычисления на коротких выборках, не превышающих два периода анализируемого сигнала. При выборе метода определения периода сигнала, представленного цифровыми отсчетами [4—7] с учетом очевидных требований низкой чувствительности к фазовым сдвигам, наличию постоянной составляющей в сигнале и, главное, наличию помех (шумов), было отдано предпочтение методу, являющемуся разновидностью метода наименьших квадратов.

Предлагаемый метод заключается в отыскании минимума из массива средних квадратических отклонений D_j , который сформирован путем сравнения начального подмассива, представляющего собой первые несколько отсчетов рассматриваемого сигнала, и подмассива такого же размера, сдвинутого относительно начального на фиксированный интервал времени:

$$D_j = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n [U(t_m) - U(t_{m+j})]^2},$$

где n — количество точек сравнения (на основе экспериментальных данных принято $n = 100$); $U(t_m)$, $U(t_{m+j})$ — m -е отсчеты соответственно начального и сравниваемого подмассивов рассматриваемого сигнала; $j \in [n_{\min}; n_{\max}]$ — параметр сдвига сравниваемого подмассива; n_{\min} , n_{\max} — минимальная и максимальная границы ожидаемой области значения периода.

При моделировании зашумления сигналов используем центрированный (математическое ожидание равно нулю) белый шум $U_{\text{ш}}$, отнесенный к амплитуде основной гармоники $U_{\text{осн}}$:

$$R_{\text{max}} = \frac{U_{\text{осн}} - U_{\text{ш}}}{U_{\text{осн}}} 100.$$

Такое воздействие достаточно просто реализуется в различных программных средах высокого и низкого уровней согласно равномерному закону распределения:

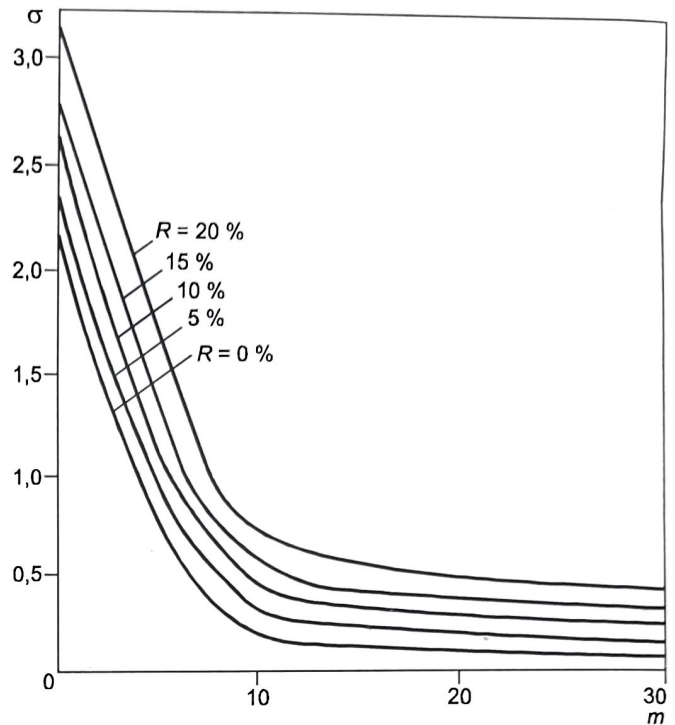


Рис. 1. Влияние шумов на СКО при $T_p = mT_c \pm \Delta t$

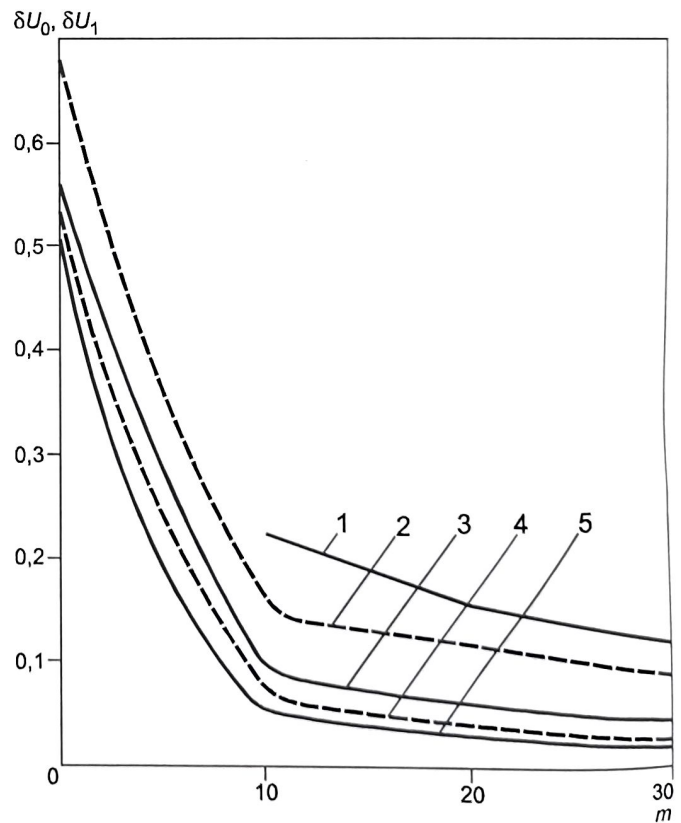


Рис. 2. Влияние шумов на погрешности δU_0 , δU_1 при $T_p = mT_c \pm \Delta t$:
1 — δU_1 при $R = 15\%$; 2 — δU_0 при $R = 15\%$; 3 — δU_1 при $R = 5\%$;
4 — δU_0 при $R = 5\%$; 5 — δU_0 , δU_1 при $R = 0$

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{d-c}, & x \in [c, d]; \\ 0, & x \notin [c, d], \end{cases}$$

где $p_{\xi}(x)$ — плотность распределения случайной величины ξ на отрезке $[c, d]$.

Влияние неточного знания периода и наличия шумов будем оценивать по известным формулам:

$$\delta X = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left| \frac{X_{изв} - X_{расч}}{X_{изв}} \right| 100;$$

$$\sigma = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1} (U_{T_j} - U_{расч_j})^2},$$

где δX , $X_{изв}$, $X_{расч}$ — относительная усредненная погрешность, известное и расчетное значения искомой величины;

$M = 1000$ — число экспериментов, достаточное для исключения влияния случайности шумов на результаты исследований; σ — среднее квадратическое отклонение; U_{T_j} , $U_{расч_j}$ — тестовый и расчетный сигналы.

Как правило, проблема незнания либо неточного задания T_c при вычислении коэффициентов Фурье устраняется увеличением интервала реализации анализируемого сигнала.

Для выявления связи погрешностей ДПФ с интервалом реализации анализируемого массива T_p и уровнем шумов был проведен вычислительный эксперимент. При этом рассматривали отклонение от номинального значения T_c , равное одному шагу дискретизации $\Delta t = 10^{-4}$ с, т. е. $T_p = mT_c \pm \Delta t$; $m \leq 30$. Как пример в таблице и на рис. 1, 2 приведены результаты ДПФ трехчастотного сигнала с периодом $T_c = 0,02$ с при наличии постоянной составляющей и шума, уровень которого составляет 0—20 %:

$$u(t) = U_0 + \sum_{i=1}^3 U_{mi} \sin(2\pi f_i t + \varphi_i)$$

при $U_0 = 100$ В; $U_{m1} = 100$ В; $U_{m2} = 50$ В; $U_{m3} = 10$ В; $f = 50$ Гц; $\varphi_1 = 30^\circ$; $\varphi_2 = 60^\circ$; $\varphi_3 = 90^\circ$.

Как и следовало ожидать, при отсутствии шумов ДПФ с предварительным определением периода практически не дает погрешности и лишь с ростом уровня шума эти погрешности растут. Увеличение T_p действительно способствует уменьшению погрешности ДПФ, порядок которой обратно пропорционален порядку T_p . При этом следует учесть, что погрешность задания T_p была минимальной, тогда как при ДПФ с предварительным определением T_c максимальная погрешность определения периода составляла $5\Delta t$ при $R = 20$ %. Однако необходимо иметь в виду, что увеличение T_p неизбежно ведет к росту вычислительных и временных затрат и, как следствие, к привлечению дополнительной аппаратуры (память, сопроцессор).

Описанная выше процедура ДПФ с предварительным определением периода была успешно применена при функциональном контроле и диагностике штанговых глубинных насосных установок по ваттметрограммам, представ-

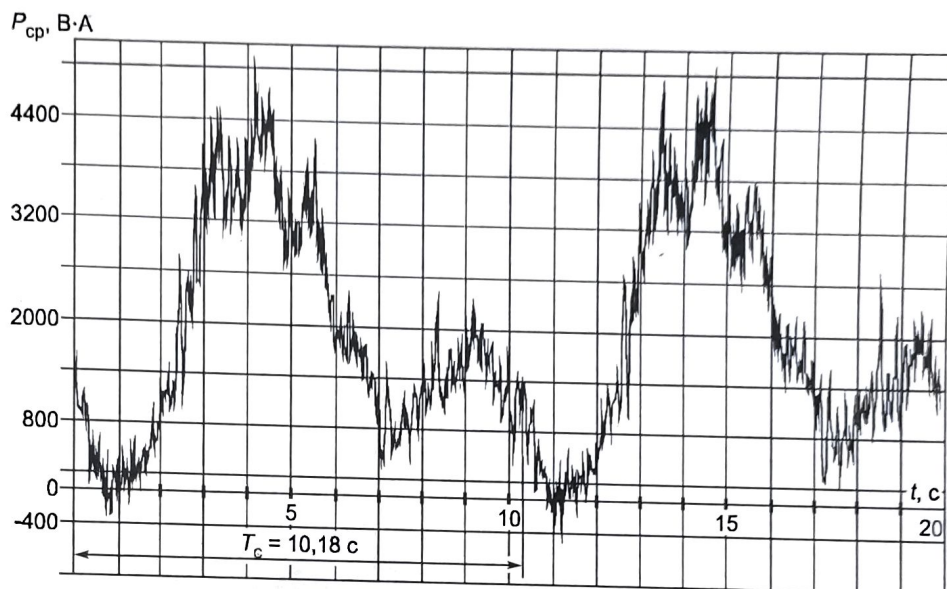


Рис. 3. Ваттметрограмма штанговой глубинной насосной установки (скважина № 850)

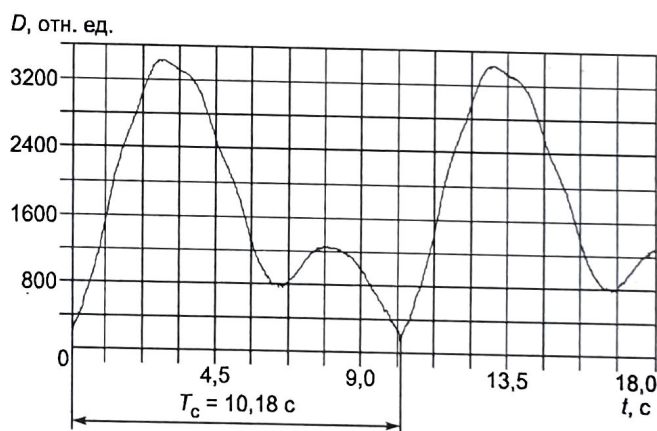


Рис. 4. Массив СКО

ляющим собой зависимость средней за период питания активной мощности $P_{ср}$ от хода поршня (рис. 3, 4).

С помощью найденного периода (в нашем конкретном случае $T_c = 10,18$ с) легко провести ДПФ, найти амплитуды основных гармоник ваттметрограмм, определить необходимые соотношения амплитуд гармоник мощности и сделать заключение по диагностированию контролируемой насосной установки [8—10].

Описанная процедура определения T_c использована также в комплексе программ функционального контроля и диагностирования электротехнических и электромеханических устройств при расчете действующих значений многочастотных сигналов и представляет самостоятельный интерес при распознавании информативных потоков данных [11, 12].

Литература

1. Лабутин С. А., Пугин М. В. // Измерительная техника. — 1998. — № 9. — С. 34.
2. Двинских В. А. // Измерительная техника. — 1999. — № 2. — С. 10.
3. Евсиков М. Ю. // Электросвязь. — 1998. — № 11. — С. 19.